

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

NAYANE CARVALHO FREITAS

ESTIMATIVA DO VETOR NORMAL AFIM EM SUPERFÍCIES DISCRETAS

Maceió

2014

NAYANE CARVALHO FREITAS

ESTIMATIVA DO VETOR NORMAL AFIM EM SUPERFÍCIES DISCRETAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof<sup>º</sup> Dr. Dimas Martínez Morera

Co-orientadora: Prof<sup>ª</sup> Dr. Maria Andrade

Maceió

2014

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha**

F866e Freitas, Nayane Carvalho.  
Estimativa do vetor normal afim em superfícies discretas / Nayane  
Carvalho Freitas. – 2014.  
44 f.

Orientador: Dimas Martínez Morera.  
Co-orientadora: Maria Andrade.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 43-44.

1. Superfície discreta . 2. Vetor normal afim. 3. Vetor conormal afim. 4.  
Retalho triangular de Bézier. I. Título.

CDU: 514.142

## AGRADECIMENTOS

Agradeço infinitamente a Deus que me deu toda força necessária para superar os obstáculos encontrados ao longo desse período.

Aos meus pais, Maria Stela Freitas e Wanderley Freitas, pela confiança, pelo apoio e por terem sido tão presentes em minha vida mesmo estando distantes, sem eles nada seria possível. Também a minha tia Ivani Freitas, por sempre me confortar com suas palavras de carinho e motivação.

Ao meu orientador prof<sup>o</sup>. Dr. Dimas Martínez, por cada palavra de incentivo em meus momentos de incertezas, por sua acolhida, por me apoiar e me ajudar a superar todos os tipos de dificuldades.

A minha co-orientadora prof<sup>o</sup>. Dr. Maria Andrade, pela sua gentil disponibilidade em nos ajudar nesta pesquisa.

Ao meu querido amigo prof<sup>o</sup> Dr. Adelailson Peixoto, pelas lições de como enfrentar as grandes adversidades com coragem, determinação e confiança e por me doar uma família arapiraquense a qual levarei pra sempre em meu coração.

Aos meus amigos do laboratório de Computação Gráfica Tiago Novello, Augusto Ícaro, Ailton Felix e Leandro Miranda por toda a ajuda com a programação. De modo muito especial, agradeço imensamente ao meu amigo Fabrício Lira pela sua paciência e generosidade estando sempre disposto a me ajudar no que fosse preciso.

As minhas amigas Rosely e Aline Karoline que conviveram comigo durante esse período, compartilhando dos meus momentos de tristezas e felicidades. Agradeço pelas nossas boas risadas e principalmente por estarem ao meu lado por todo esse tempo.

A cada um, muito obrigada!

# Lista de Figuras

1.1	Plano tangente $T_p S$ . . . . .	12
3.2	Retalho quadrático de Bézier junto a sua malha de controle. . . . .	27
3.3	Algoritmo de de Casteljau. . . . .	28
3.4	Vetores conormal e normal afins no retalho triangular de Bézier quadrático. . . . .	31
4.5	Triângulos que compartilham as arestas do domínio $T$ . . . . .	33
4.6	Quatro tetraedros que podem ser formados por dois triângulos adjacentes junto ao centro de massa da união das $k$ -vizinhanças dos vértices da aresta comum desses dois triângulos. . . . .	34
4.7	3-vizinhança de um vértice. . . . .	34
4.8	Relação entre o valor de $\alpha$ e a concavidade do poliedro. . . . .	35
4.9	Discretização do elipsóide por retalhos triangulares de Bézier quadráticos. . . . .	36
4.10	Imagens da $n$ -partição de um triângulo no retalho de Bézier quadrático. . . . .	37
5.11	Estimativa do vetor normal afim. . . . .	38
5.12	Estimador normal afim e tamanho da vizinhança. . . . .	39
5.13	Estimativa do normal afim nos pontos de variação do sinal da curvatura gaussiana euclidiana. . . . .	40
5.14	Formato do retalho quando o seu domínio é um triângulo obtusângulo. . . . .	40
5.15	À esquerda o vetor conormal afim e à direita o vetor normal afim antes e depois de uma transformação equiafim. . . . .	42

## RESUMO

A invariância de propriedades geométricas é um fator crucial em diversas áreas da Matemática, em particular da Computação Gráfica. Neste sentido, a geometria afim tem ocupado um espaço significativo nesse campo de aplicação, por ter uma posição intermediária entre as geometrias euclidiana e projetiva. A geometria afim é uma generalização da euclidiana, porém mais simples de ser trabalhada que a projetiva, tanto analítica quanto computacionalmente, e permite descrever boa parte das operações usadas em Computação Gráfica. No entanto, ainda não encontramos na literatura estimadores de propriedades geométricas afins em superfícies discretas. Por este motivo, a proposta desse trabalho é dar o primeiro passo no estudo de invariantes afins para essas superfícies, apresentando aqui uma estimativa para o vetor normal afim. Tal estimativa foi obtida a partir de uma representação discreta da superfície usando como elementos pedaços de parabolóides ao invés de planos.

**Palavras-chave:** Superfície Discreta; Vetor Normal Afim; Vetor Conormal Afim; Retalho Triangular de Bézier.

## ABSTRACT

The invariance of geometric properties is an important factor in many areas of Mathematics, particularly in Computer Graphics. Accordingly, the affine geometry has occupied a significant place in this field of application, since it has an intermediate position between euclidean and projective geometries. Affine geometry is a generalization of euclidean, but working with it is simpler than working with projective geometry, both analytically and computationally, and allows to describe much of the operations used in Computer Graphics. However, we have not found in literature estimators of affine geometrical properties for discrete surfaces. Therefore, the aim of this work is to take the first step in the study of affine invariants in these surfaces, presenting here an estimate of the affine normal vector. This estimate is obtained from a discrete representation of the surface using paraboloids instead of planes.

**Keywords:** Discrete Surface; Affine Normal Vector; Affine Conormal Vector; Triangular Patch Bezier.

# SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	8
1 PRELIMINARES .....	10
1.1 Coordenadas Baricêntricas .....	10
1.2 Geometria Euclidiana .....	11
2 VETORES CONORMAL E NORMAL AFIM EM SUPERFÍCIES REGULARES .....	14
2.1 Medidas Invariantes .....	14
2.2 Transformações Afins .....	15
2.3 Curvas Assintóticas .....	16
2.4 Primeira Forma Fundamental Afim .....	18
2.5 Conormal e Normal Afins .....	19
3 RETALHO TRIANGULAR DE BÉZIER .....	25
3.1 Polinômios de Bernstein .....	25
3.2 Representação de Bézier de Retalhos Triangulares .....	26
3.3 Algoritmo de de Casteljau .....	27
3.4 Vetores Conormal e Normal Afins no Retalho Triangular de Bézier Quadrático .....	28
4 CÁLCULO DO NORMAL AFIM DISCRETO .....	32
4.1 Representação de Superfícies Discretas por Retalhos Triangulares de Bézier Quadráticos .....	32
4.2 Normal Afim no Vértice da Malha Triangular de uma Superfície Discreta ..	36
5 RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	38
REFERÊNCIAS .....	43



## INTRODUÇÃO

Felix Klein (1872) classificou os tipos de geometria de acordo com as propriedades invariantes dos objetos geométricos quando eles são sujeitos a vários grupos de transformações. A geometria euclidiana, por exemplo, estuda as propriedades sob a ação do grupo dos movimentos rígidos, enquanto a geometria afim abrange todas as transformações afins. Dessa forma, uma vez que movimentos rígidos são transformações afins, podemos dizer que a geometria euclidiana é um estudo particular da geometria afim.

Contrário às transformações euclidianas (movimentos rígidos) as afins não preservam comprimento e medidas angulares, portanto, elas podem mudar a forma de um objeto. Uma circunferência, por exemplo, se torna uma elipse após uma transformação afim. Assim, qualquer resultado para a circunferência onde só intervêm propriedades e relações invariantes, nesta geometria, é válido para todas as elipses com a mesma área. Isto se torna importante, por exemplo, para classificação e reconhecimento de objetos geométricos em imagens (ver [1]), isto é, regiões de uma imagem original podem ser identificadas em uma imagem deformada, de modo que a área seja preservada pela transformação, a partir de invariantes afins.

Na Computação Gráfica é essencial poder movimentar e deformar objetos geométricos, o que se faz aplicando a esses objetos transformações geralmente lineares, afins ou projetivas. Nessa abordagem, uma vantagem da geometria afim sobre a geometria euclidiana é o fato da primeira englobar um grupo maior de transformações, o que permite descrever boa parte dos objetos e operações da Computação Gráfica. Além disso, alguns problemas, como reconstrução, exigem a invariância de propriedades geométricas nos pontos amostrados. Daí a importância de estudar invariantes discretos afins compatíveis com o modelo afim diferencial.

Com intuito de utilizar todas as vantagens que a geometria afim nos traz, o objetivo deste trabalho é apresentar uma forma de calcular computacionalmente o vetor normal afim em superfícies discretas, de modo que tal estimativa preserve, no modelo discreto, as características geométricas desse vetor no modelo contínuo.

A motivação para a realização desse estudo surgiu por não encontrarmos na literatura

estimadores para as propriedades geométricas afins, em superfícies discretas, tendo em vista a importância dos mesmos nas áreas de Modelagem Geométrica e Visão Computacional.

Este trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos. No capítulo 1, fazemos uma breve revisão dos resultados preliminares necessários para o bom entendimento do texto. No capítulo 2, apresentamos os vetores conormal e normal afins em superfícies regulares e vemos que tais vetores são, respectivamente, contravariante e covariante por transformações equiafins. No capítulo 3, mostramos como os vetores conormal e normal afins podem ser calculados em um retalho de Bézier quadrático. No capítulo 4, apresentamos o estimador do normal afim em superfícies discretas. Por fim, no capítulo 5, mostramos os resultados e as limitações da implementação deste estimador discreto e fazemos um breve estudo dos parâmetros envolvidos.

## Trabalhos Relacionados

Na literatura é possível encontrar estimadores das propriedades geométricas euclidianas em superfícies discretas sob diversos pontos de vista. Em [12], por exemplo, é proposta uma aplicação da fórmula de Euler para estimar as curvaturas gaussiana e média em uma malha triangular, enquanto em [6] esses invariantes discretos são obtidos com base no teorema de Gauss-Bonnet. Já Tabin [11], propõe uma estimativa das propriedades geométricas euclidianas em malhas poligonais a partir de uma matriz simétrica definida por uma fórmula integral.

Estimativas de propriedades geométricas afins podem ser encontradas em [1], [2] e [4]. Em [1] e [2] são apresentados estimadores para as curvaturas gaussiana e média afins e vetores conormal e normal afins em superfícies paramétricas ou implícitas (no capítulo 2 deste trabalho mostramos como os últimos foram obtidos). Em [4] utilizam-se polígonos parabólicos como modelos de curvas discretas e estimativas como comprimento de arco afim e curvatura afim são apresentadas neste modelo discreto de curvas.

Neste trabalho, apresentamos uma estimativa para o vetor normal afim em superfícies discretas. Para isso, foi necessário construir uma representação dessas superfícies de maneira adequada para a geometria afim. Dessa forma, construímos um modelo de superfície discreta usando pedaços de parabolóides ao invés de planos, obtendo, portanto, o estimador do normal afim a partir dessa representação.

# 1 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos algumas definições que serão usadas no decorrer do trabalho, tais como, coordenadas baricêntricas, essenciais no estudo das superfícies triangulares de Bézier, e conceitos da geometria euclidiana que permitem definir propriedades da geometria afim. As definições apresentadas aqui são encontradas nas referências [5], [8] e [10].

## 1.1 COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Dados três pontos, não colineares,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  em  $\mathbb{R}^d$ , qualquer ponto  $P$  do plano definido por eles pode ser expresso como:

$$P = uP_1 + vP_2 + wP_3,$$

onde os escalares  $u$ ,  $v$  e  $w$  são chamados de *coordenadas baricêntricas* de  $P$  e são tais que  $u + v + w = 1$ , ou seja, são uma combinação afim de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Se  $u, v, w \geq 0$ , então a combinação é convexa e  $P$  pertence ao triângulo formado pelos três pontos.

Como consequência, as coordenadas baricêntricas tem a importante propriedade da *invariância afim*. Isto é, aplicando uma transformação afim ao triângulo  $T(P_1, P_2, P_3)$  e ao ponto  $P$ , o ponto transformado terá as mesmas coordenadas baricêntricas de  $P$  com respeito ao novo triângulo.

Considerando o triângulo canônico,  $T((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ , por exemplo, temos que qualquer ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pode ser escrito como:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + (1 - x - y)(0, 0).$$

Logo, como as coordenadas baricêntricas são invariantes por transformações afins, aplicando uma transformação afim  $A$  no plano, a imagem  $AP$  de um ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  arbitrário, ainda terá coordenadas baricêntricas  $(x, y, 1 - x - y)$  em relação à imagem  $AT$  do triângulo canônico. Por esse motivo, é comum em várias aplicações realizar todas as contas no triângulo canônico e aplicar o resultado a um triângulo arbitrário via transformação afim.

Os números  $u$ ,  $v$  e  $w$  podem ser calculados como:

$$u = \frac{\text{área}(P, P_2, P_3)}{\text{área}(P_1, P_2, P_3)} \quad v = \frac{\text{área}(P_1, P, P_3)}{\text{área}(P_1, P_2, P_3)} \quad w = \frac{\text{área}(P_1, P_2, P)}{\text{área}(P_1, P_2, P_3)}.$$

No capítulo 3, veremos que um algoritmo para avaliar uma superfície triangular de Bézier deriva da utilização de coordenadas baricêntricas de pontos do plano, gerado por uma estrutura triangular.

## 1.2 GEOMETRIA EUCLIDIANA

**Definição 1.1.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

1.  $X$  é diferenciável;
2.  $X$  é um homeomorfismo;
3. Para todo  $q \in U$  a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

**Definição 1.2.** Seja  $S$  uma superfície regular,  $p \in S$ , e consideremos todas as curvas definidas sobre  $S$  passando por  $p$ , definimos o *plano tangente* em  $p$ , denotado como  $T_p S$ , como o espaço vetorial de dimensão 2 que contém todos os vetores tangentes à família de curvas no ponto  $p$ .

Dado  $p \in S$  seja  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  uma curva parametrizada diferenciável, com  $\alpha(0) = p$ . O vetor velocidade  $\alpha'(0)$  é chamado de *vetor tangente* a  $S$  em  $p$ .

A figura 1.1 ilustra o vetor  $w \in T_p S$ , que é o vetor velocidade  $\alpha'(0)$  de uma curva  $\alpha = X \circ \beta$ , onde  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$ .

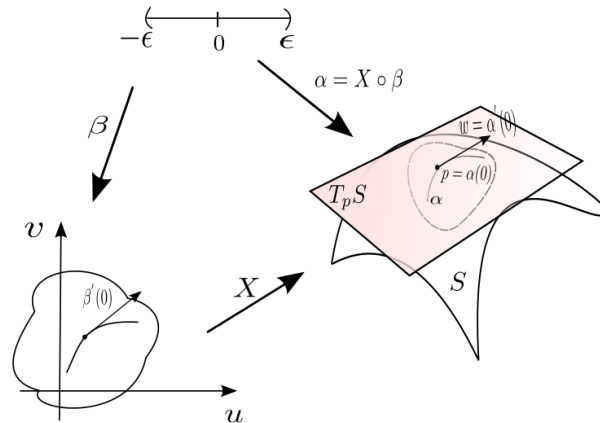
A escolha de uma parametrização  $X$  de  $S$  determina uma base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_p S$ , chamada *base associada a  $X$* .

**Definição 1.3.** Seja  $p \in S$ , a forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \geq 0,$$

é chamada a *primeira forma fundamental euclidiana* da superfície regular  $S$  em  $p$ .

**Figura 1.1:** Plano tangente  $T_pS$ .



Fonte: Autor, 2014.

A primeira forma fundamental euclidiana, pode ser expressa na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a uma parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ , da seguinte maneira:

Seja  $w = \alpha'(0) = aX_u + bX_v \in T_pS$ . Logo,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2E + 2abF + b^2G, \end{aligned}$$

onde,  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$  e  $G = \langle X_v, X_v \rangle$  são os coeficientes da primeira forma fundamental euclidiana na base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_pS$ .

Fixada uma parametrização,  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p \in S$ , definimos o *vetor normal euclidiano* em cada ponto  $q \in X(U)$ , como:

$$N_e(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(q).$$

**Definição 1.4.** A aplicação  $N_e : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que toma seus valores na esfera unitária é chamada de *aplicação de Gauss* de  $S$ .

A diferencial da aplicação de Gauss  $dN_{e_p} : T_pS \rightarrow T_pS$ , é uma aplicação linear auto-adjunta (ver [5]), isto é,

$$\langle dN_{e_p}(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_{e_p}(w_2) \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_pS.$$

Logo, podemos associar a  $dN_{e_p}$  uma forma quadrática  $Q$  em  $T_pS$ , dada por:

$$Q(w) = \langle dN_{e_p}(w), w \rangle, \quad w \in T_pS.$$

**Definição 1.5.** Seja  $p \in S$ , a forma quadrática  $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$II_p(w) = - \langle dN_{e_p}(w), w \rangle,$$

é chamada a *segunda forma fundamental euclidiana* de  $S$  em  $p$ .

Também podemos expressar a segunda forma fundamental euclidiana na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a uma parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ .

De fato, seja  $N_e$  o vetor normal a  $S$  em  $p \in S$  e  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Logo, o vetor tangente a  $\alpha(s)$  em  $p$  é  $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ . Indiquemos por  $N_e(s)$  a restrição do vetor normal à curva  $\alpha(s)$ , dessa forma, temos:

$$\langle N_e(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_e(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N_e'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= - \langle dN_{e_p}(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= - \langle N_e'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N_e(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N_{e_p}, X_{uu}(u')^2 + X_u u'' + 2X_{uv}u'v' + X_{vv}(v')^2 + X_v v'' \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle N_{e_p}, X_u \rangle = \langle N_{e_p}, X_v \rangle = 0$ , segue que:

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2,$$

onde,  $e = \langle N_{e_p}, X_{uu} \rangle$ ,  $f = \langle N_{e_p}, X_{uv} \rangle$ ,  $g = \langle N_{e_p}, X_{vv} \rangle$  são os coeficientes da segunda forma fundamental euclidiana.

**Definição 1.6.** Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a *curvatura Gaussiana euclidiana*,  $K_e$ , de  $S$  em  $p$ .

Por fim, em [5] observamos que a curvatura Gaussiana euclidiana, pode ser obtida pelos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental da seguinte forma:

$$K_e = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

No capítulo seguinte, veremos que as definições apresentadas nessa seção são ferramentas fundamentais no estudo das propriedades geométricas afins.

## 2 VETORES CONORMAL E NORMAL AFIM EM SUPERFÍCIES REGULARES

Neste capítulo, apresentamos os vetores conormal e normal afins em superfícies regulares, propriedades geométricas fundamentais no estudo de invariantes, tais como, as curvaturas gaussianas e médias afins. Veremos que esses vetores são, respectivamente, contravariante e covariante por transformações equiafins. Para tanto, definimos as transformações equiafins e apresentamos uma métrica invariante por essas transformações.

### 2.1 MEDIDAS INVARIANTES

**Definição 2.7.** Sejam  $S$  uma superfície regular e  $G$  um grupo de transformações associadas a uma geometria. Dizemos que uma medida geométrica  $m$  é *invariante* pelo grupo  $G$  se  $\forall p \in S, \forall A \in G, m(A(p)) = m(p)$ , *covariante* se  $m(A(p)) = A(m(p))$  e *contravariante* se  $m(A(p)) = A^{-T}(m(p))$ , onde  $A^{-T}$  é a transformação cuja matriz é a transposta da inversa da matriz da transformação  $A$ . Ou seja,  $A^{-T} = (A^{-1})^T$ .

Medidas numéricas, isto é  $m(p) \in \mathbb{R}, \forall p \in S$ , tais como o comprimento e a curvatura são geralmente invariantes dependendo da geometria e do grupo  $G$ . Porém quando a medida gera uma estrutura como um vetor, uma matriz ou um tensor, normalmente elas não são invariantes ([2]).

Como exemplo, seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e seja  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação afim. Se aplicarmos  $A$  em  $\alpha$ , o vetor tangente à nova curva é  $A \circ \alpha'$ , ou seja, o novo vetor tangente é dado pela transformação aplicado à curva inicial, portanto são covariantes pelo grupo das transformações afins, o que implica o plano tangente ser também covariante por esse grupo.

## 2.2 TRANSFORMAÇÕES AFINS

**Definição 2.8.** Uma transformação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é afim se  $T$  preserva combinações afins de pontos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^n a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(P_i), \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad P_i \in \mathbb{R}^3.$$

**Proposição 2.1.** A transformação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é afim se, e somente se,  $T$  é da forma  $T(u) = L(u) + v_0$ , onde  $L$  é linear e  $v_0 \in \mathbb{R}^3$ .

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Suponha que  $T$  é afim e defina  $L(u) = T(u) - v_0$ , onde  $v_0 = T(0, 0, 0)$ . Mostremos que  $L$  é linear.

De fato, dados  $u, v \in \mathbb{R}^3$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , segue que:

$$\begin{aligned} L(\alpha u + v) &= T(\alpha u + v) - T(0, 0, 0) \\ &= T(\alpha u + v - \alpha(0, 0, 0)) - T(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Como por hipótese  $T$  é uma transformação afim então pela definição 2.8, temos:

$$\begin{aligned} L(\alpha u + v) &= \alpha T(u) + T(v) - \alpha T(0, 0, 0) - T(0, 0, 0) \\ &= \alpha(T(u) - T(0, 0, 0)) + T(v) - T(0, 0, 0) \\ &= \alpha L(u) + L(v). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $T(u) = L(u) + v_0$ , mostremos que  $T$  é afim. Para isso, sejam  $\{r_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ , tais que,  $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ , e  $p_1, p_2, \dots, p_n$  pontos em  $\mathbb{R}^3$ , temos:

$$\begin{aligned} T(r_1 p_1 + \dots + r_n p_n) &= L(r_1 p_1 + \dots + r_n p_n) + v_0 \\ &= r_1 L(p_1) + \dots + r_n L(p_n) + v_0 \\ &= r_1 L(p_1) + \dots + r_n L(p_n) + \left(\sum_{i=1}^n r_i\right) v_0 \\ &= r_1 (L(p_1) + v_0) + \dots + r_n (L(p_n) + v_0) \\ &= r_1 T(p_1) + \dots + r_n T(p_n). \end{aligned}$$

■

**Definição 2.9.** Uma transformação afim  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita *equiafim* se é da forma  $T(x) = L(x) + v_0$ , onde  $\det(L) = 1$  e  $v_0 \in \mathbb{R}^3$ , ou seja, são transformações afins que preservam volume.



Neste texto vamos trabalhar com transformações equiafins. Sendo assim, buscamos encontrar uma métrica invariante por esse tipo de transformação. Pelo fato das curvas assintóticas serem invariantes pelas transformações equiafins, as equações que definem estas curvas nos permitem definir medidas invariantes da geometria afim. Dessa forma, uma motivação para obter tal métrica surge do estudo de curvas assintóticas em superfícies regulares, como veremos a seguir.

## 2.3 CURVAS ASSINTÓTICAS

**Definição 2.10.** Sejam  $C$  uma curva regular, em uma superfície  $S$ , que passa por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  e  $\cos \theta = \langle \eta, N \rangle$ , onde  $\eta$  é o normal a  $C$  e  $N$  normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_\eta = k(p) \cos \theta$  é chamado de *curvatura normal* de  $C$  em  $p$ .

**Definição 2.11.** Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização da superfície regular  $S$  e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  uma curva no domínio da parametrização, ou seja,  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ . Dizemos que a curva  $X \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é *assintótica* se para cada  $t \in I$ , o vetor tangente  $(X \circ \gamma)_t$  é uma direção na qual a curvatura normal é zero.

**Notação 2.1:** Denotamos por  $[u, v, w]$  o determinante de uma matriz  $3 \times 3$  formada pelos vetores colunas  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ .

Pela definição 2.11, dizemos que a curva  $X \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é assintótica se, e somente se,

$$[X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}] = 0, \quad \forall t \in I. \quad (2.1)$$

De fato, como  $X_u$  e  $X_v$  definem o plano tangente à superfície em cada ponto e  $(X \circ \alpha)_{tt}$  define a direção do vetor normal à curva  $X \circ \gamma$  nos pontos onde sua curvatura é não nula, então,  $k_\eta = k \cos \theta = 0$  se, e somente se, o vetor normal a curva é perpendicular ao vetor normal à superfície, equivalentemente, se  $(X \circ \gamma)_{tt} \in T_p S$ , e portanto  $[X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}] = 0, \quad \forall t \in I$ .

A equação (2.1) é invariante por transformações equiafins, pois o plano tangente é covariante afim. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} (X \circ \gamma)_t &= (X_u \circ \gamma) \frac{du}{dt} + (X_v \circ \gamma) \frac{dv}{dt} = (X_u \circ \gamma) \dot{u} + (X_v \circ \gamma) \dot{v}, \\ (X \circ \gamma)_{tt} &= (X_{uu} \circ \gamma) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2(X_{uv} \circ \gamma) \left( \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} \right) + (X_{vv} \circ \gamma) \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \\ &\quad + (X_u \circ \gamma) \frac{d^2 u}{dt^2} + (X_v \circ \gamma) \frac{d^2 v}{dt^2} \\ &= (X_{uu} \circ \gamma) \dot{u}^2 + (2X_{uv} \circ \gamma) \dot{u} \dot{v} + (X_{vv} \circ \gamma) \dot{v}^2 + (X_u \circ \gamma) \ddot{u} + (X_v \circ \gamma) \ddot{v}, \end{aligned}$$

onde  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ,  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ . Assim, no ponto  $p = \gamma(t)$ , obtem-se:

$$\begin{aligned} [X_u(p), X_v(p), (X \circ \gamma)_{tt}] &= [X_u(p), X_v(p), \dot{u}^2 X_{uu}(p) + 2\dot{u}\dot{v}X_{uv}(p) + \dot{v}^2 X_{vv}(p) \\ &\quad + X_u(p)\ddot{u} + X_v(p)\ddot{v}] \\ &= \dot{u}^2 [X_u(p), X_v(p), X_{uu}(p)] + 2\dot{u}\dot{v} [X_u(p), X_v(p), X_{uv}(p)] \\ &\quad + \dot{v}^2 [X_u(p), X_v(p), X_{vv}(p)]. \end{aligned}$$

Definindo,  $L = [X_u, X_v, X_{uu}]$ ,  $M = [X_u, X_v, X_{uv}]$  e  $N = [X_u, X_v, X_{vv}]$ , segue que:

$$[X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}] = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2.$$

Portanto, a curva  $X \circ \gamma$  é assintótica se, e somente se,

$$L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = 0.$$

Os determinantes  $L, M, N$  e a forma quadrática acima, são invariantes sobre um sistema fixo de parâmetros  $u$  e  $v$ . Dessa forma, tomando um novo sistema de coordenadas  $\bar{u}, \bar{v}$  ([1]), tem-se:

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})).$$

Considerando,  $\bar{\gamma}(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ , como a curva definida no domínio da nova parametrização, então,  $\gamma(t) = (u(\bar{\gamma}(t)), v(\bar{\gamma}(t)))$ , é tal que:

$$\bar{X}(\bar{\gamma}(t)) = X(u(\bar{\gamma}(t)), v(\bar{\gamma}(t))) = X(\gamma(t)).$$

Portanto, pela Regra da Cadeia, segue-se:

$$\begin{aligned} [\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}, (\bar{X} \circ \bar{\gamma})_{tt}] &= [X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, (X \circ \gamma)_{tt}] \\ &= [X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + [X_v, X_u, (X \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ &= [X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - [X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ &= [X_v, X_u, (X \circ \gamma)_{tt}] J, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $J = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$  é o jacobiano da mudança de parâmetros. A equação (2.2) pode ser escrita na forma,

$$\bar{L}\bar{d}\bar{u}^2 + 2\bar{M}\bar{d}\bar{u}\bar{d}\bar{v} + \bar{N}\bar{d}\bar{v}^2 = (Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)J, \tag{2.3}$$

onde (ver [1]),

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + M \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right\} J, \\ \bar{M} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + M \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right\} J, \\ \bar{N} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + M \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right\} J. \end{aligned}$$

Dessa forma, observe que:

$$\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 = (LN - M^2)J^4. \quad (2.4)$$

Portanto, das equações (2.3) e (2.4) obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{[\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}, (\bar{X} \circ \bar{\gamma})_{tt}]}{|\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2|^{1/4}} dt^2 &= \frac{\bar{L}d\bar{u}^2 + 2\bar{M}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{N}d\bar{v}^2}{|\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2|^{1/4}} \\ &= \frac{(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)J}{|\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2|^{1/4}} \\ &= \frac{(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)J}{|J^4(LN - M^2)|^{1/4}} \\ &= \frac{[X_u, X_v, (X \circ \gamma)_{tt}]}{|LN - M^2|^{1/4}} dt^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo, conclui-se que, a menos de mudança de sinal decorrente de  $\frac{J}{|J^4|^{1/4}}$ , a forma diferencial quadrática em (2.5) é invariante por transformações equiafins.

**Observação 2.3.1.** A diferença de sinal pode ser resolvida se fixarmos uma orientação.

Essa forma quadrática define, portanto, a métrica de *Berwald-Blaschke* dada por:

$$ds^2 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{1/4}},$$

onde,  $L = [X_u, X_v, X_{uu}]$ ,  $M = [X_u, X_v, X_{uv}]$  e  $N = [X_u, X_v, X_{vv}]$  são tais que o coeficiente da métrica,  $d = LN - M^2$ , é diferente de zero.

## 2.4 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL AFIM

**Definição 2.12.** A métrica de Berwald-Blaschke é o que chamamos de *Primeira Forma Fundamental Afim*, e denotaremos por  $I_a$ , ou seja,

$$I_a = \sum_{i,j=u,v} g_{ij} di dj,$$

$$\text{onde } g_{uu} = \frac{L}{|LN - M^2|^{1/4}}, \quad g_{uv} = g_{vu} = \frac{M}{|LN - M^2|^{1/4}}, \quad g_{vv} = \frac{N}{|LN - M^2|^{1/4}}.$$

**Observação 2.4.1.** No capítulo 1, vimos que a curvatura gaussiana euclidiana pode ser definida pela expressão  $K_e = \frac{\det(l_{ij})}{EG - F^2}$ , onde  $E, G, F$  e  $l_{ij}=\{u,v\}$  são, respectivamente, os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental euclidiana. Portanto, sendo

$$l_{ij} = \langle N_e, X_{ij} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{ij} \right\rangle = \frac{[X_u, X_v, X_{ij}]}{\|X_u \times X_v\|},$$

temos:

$$l_{uu} = \frac{L}{\|X_u \times X_v\|}, \quad l_{uv} = l_{vu} = \frac{M}{\|X_u \times X_v\|}, \quad l_{vv} = \frac{N}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Dessa forma, a curvatura gaussiana euclidiana pode ser obtida da seguinte forma:

$$K_e = \frac{d}{\|X_u \times X_v\|^4}. \quad (2.6)$$

Portanto, o sinal de  $K_e$  está relacionado com o de  $d = LN - M^2$ , ou seja,

1.  $K_e < 0 \Leftrightarrow d < 0$ ;
2.  $K_e = 0 \Leftrightarrow d = 0$ ;
3.  $K_e > 0 \Leftrightarrow d > 0$ .

O ponto onde  $d < 0$ ,  $d = 0$ ,  $d > 0$  é chamado, respectivamente, hiperbólico, parabólico, ou elíptico. Neste trabalho, estamos desconsiderando os pontos parabólicos visto que consideramos o coeficiente da métrica  $d$  diferente de zero.

## 2.5 CONORMAL E NORMAL AFINS

Seja  $S$  uma superfície regular e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  uma parametrização de  $S$ . Dada a matriz  $A$  de ordem 3 com  $\det(A) = 1$ , denotando por  $A^{-T}$  a transposta da inversa da matriz  $A$ , isto é,  $A^{-T} = (A^{-1})^T$ , temos que:

$$AX_u \times AX_v = A^{-T}(X_u \times X_v).$$

De fato, sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad X_u = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}, \quad X_v = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}.$$

Observe que,

$$AX_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au'_1 + bu'_2 + cu'_3 \\ du'_1 + eu'_2 + fu'_3 \\ gu'_1 + hu'_2 + iu'_3 \end{pmatrix},$$

$$AX_v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av'_1 + bv'_2 + cv'_3 \\ dv'_1 + ev'_2 + fv'_3 \\ gv'_1 + hv'_2 + iv'_3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} AX_u \times AX_v &= (au'_1 + bu'_2 + cu'_3, du'_1 + eu'_2 + fu'_3, gu'_1 + hu'_2 + iv'_3) \\ &\times (av'_1 + bv'_2 + cv'_3, dv'_1 + ev'_2 + fv'_3, gv'_1 + hv'_2 + iv'_3) \\ &= ((ei - hf)(u'_2v'_3 - u'_3v'_2) + (fg - di)(u'_3v'_1 - u'_1v'_3) + (dh - eg)(u'_1v'_2 - u'_2v'_1), \\ &\quad (ch - bi)(u'_2v'_3 - u'_3v'_2) + (ai - gc)(u'_3v'_1 - u'_1v'_3) + (bg - ah)(u'_1v'_2 - u'_2v'_1), \\ &\quad (bf - ec)(u'_2v'_3 - u'_3v'_2) + (cd - af)(u'_3v'_1 - u'_1v'_3) + (ae - bd)(u'_1v'_2 - u'_2v'_1)). \end{aligned}$$

Por outro lado, como o  $\det(A) = 1$ , então a inversa da matriz  $A$  é dada pela transposta da matriz dos seus cofatores, dessa forma, temos que:

$$A^{-T} = \begin{pmatrix} ei - hf & fg - di & dh - eg \\ ch - bi & ai - gc & bg - ah \\ bf - ec & cd - af & ae - bd \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$A^{-T}(X_u \times X_v) = \begin{pmatrix} ei - hf & fg - di & dh - eg \\ ch - bi & ai - gc & bg - ah \\ bf - ec & cd - af & ae - bd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_2v'_3 - u'_3v'_2 \\ u'_3v'_1 - u'_1v'_3 \\ u'_1v'_2 - u'_2v'_1 \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que:

$$A^{-T}(X_u \times X_v) = \begin{pmatrix} (ei - hf)(u'_2v'_3 - u'_3v'_2) + (fg - di)(u'_3v'_1 - u'_1v'_3) + (dh - eg)(u'_1v'_2 - u'_2v'_1) \\ (ch - bi)(u'_2v'_3 - u'_3v'_2) + (ai - gc)(u'_3v'_1 - u'_1v'_3) + (bg - ah)(u'_1v'_2 - u'_2v'_1) \\ (bf - ec)(u'_2v'_3 - u'_3v'_2) + (cd - af)(u'_3v'_1 - u'_1v'_3) + (ae - bd)(u'_1v'_2 - u'_2v'_1) \end{pmatrix}.$$

Portanto, concluímos que  $AX_u \times AX_v = A^{-T}(X_u \times X_v)$ . Dessa forma, tomando  $p \in S$ , temos:

$$\begin{aligned} N_\epsilon(A(p)) &= \frac{X_u(A(p)) \times X_v(A(p))}{\|X_u(A(p)) \times X_v(A(p))\|} \\ &= \frac{A(X_u(p)) \times A(X_v(p))}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|} \\ &= \frac{A^{-T}(X_u \times X_v)(p)}{\|A^{-T}(X_u \times X_v)(p)\|} \\ &= \frac{1}{\|A^{-T}N_\epsilon(p)\|} A^{-T}N_\epsilon(p). \end{aligned}$$

Logo, o vetor normal euclidiano,  $N_e$ , não é contravariante por transformações equiafins. Porém, uma vez que relações de ortogonalidade não se preservam por transformações afins e sendo o plano tangente covariante por essas transformações, é possível definir um vetor contravariante afim na mesma direção de  $N_e$ . Este vetor é chamado de *conormal afim* e definido pela seguinte expressão:

$$\nu = |K_e|^{-1/4} N_e.$$

Como, por definição,  $\nu$  está na mesma direção de  $N_e$ , então  $\langle \nu, dX \rangle = 0$ . Note ainda, que a métrica afim satisfaz  $d^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$ , onde o sinal  $\pm$  depende do ponto ser elíptico ou hiperbólico.

De fato, sejam  $D_u(N_e)$  e  $D_v(N_e)$  as derivadas parciais do vetor normal euclidiano com respeito as coordenadas  $(u, v)$  de um ponto no domínio da parametrização da superfície  $S$ . Como  $D_u(N_e)$  e  $D_v(N_e)$  pertencem a  $T_pS$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} D_u(N_e) &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ D_v(N_e) &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \nu_u &= (|K_e|^{-1/4})_u N_e + |K_e|^{-1/4} D_u(N_e) \\ &= (|K_e|^{-1/4})_u N_e + |K_e|^{-1/4} (a_{11}X_u + a_{12}X_v), \\ \nu_v &= (|K_e|^{-1/4})_v N_e + |K_e|^{-1/4} D_v(N_e) \\ &= (|K_e|^{-1/4})_v N_e + |K_e|^{-1/4} (a_{21}X_u + a_{22}X_v). \end{aligned}$$

Portanto, utilizando a multilinearidade e a antisimetria da função determinante, obtemos:

$$\begin{aligned} [\nu, \nu_u, \nu_v] &= [ |K_e|^{-1/4} N_e, |K_e|^{-1/4} (a_{11}X_u + a_{12}X_v), |K_e|^{-1/4} (a_{21}X_u + a_{22}X_v) ] \\ &= |K_e|^{-3/4} [N_e, a_{11}X_u + a_{12}X_v, a_{21}X_u + a_{22}X_v] \\ &= |K_e|^{-3/4} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})[N_e, X_u, X_v]. \end{aligned}$$

Pela definição 1.6, temos que  $K_e = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , daí segue-se que:

$$\begin{aligned} [\nu, \nu_u, \nu_v] &= \pm K_e^{1/4} \langle N_e, X_u \times X_v \rangle \\ &= \pm K_e^{1/4} \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_u \times X_v \right\rangle \\ &= \pm K_e^{1/4} \frac{\|X_u \times X_v\|^2}{\|X_u \times X_v\|} \\ &= \pm K_e^{1/4} \|X_u \times X_v\|. \end{aligned}$$

Pela equação 2.6,  $d = K_e \|X_u \times X_v\|^4$ , portanto concluímos que  $d^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$ .

Por uma questão de simplicidade no texto, estamos agora considerando somente os pontos elípticos. A menos de um sinal, os resultados são os mesmos nos pontos hiperbólicos.

Como  $[\nu, \nu_u, \nu_v] = d^{1/4} \neq 0$ , então, as derivadas  $\nu_u$  e  $\nu_v$  definem um plano em todo ponto  $p \in S$ . O vetor normal afim  $\xi$  pode ser obtido através do vetor ortogonal ao plano gerado por  $\nu_u$  e  $\nu_v$ , podendo ser definido localmente pela relação (ver [3]):

$$\langle \nu, \xi \rangle = 1, \quad \langle \xi, \nu_u \rangle = \langle \xi, \nu_v \rangle = 0.$$

Portanto, o normal afim satisfaz,  $\langle \nu, \xi_u \rangle = \langle \nu, \xi_v \rangle = 0$  e  $d^{1/4} = [X_u, X_v, \xi]$ .

De fato, sabendo que  $\langle \nu, \xi \rangle = 1$ , pela definição do vetor conormal, temos:

$$K_e^{-1/4} \langle N_e, \xi \rangle = 1 \Rightarrow \langle N_e, \xi \rangle = K_e^{1/4},$$

logo,

$$\begin{aligned} [X_u, X_v, \xi] &= \langle X_u \times X_v, \xi \rangle \\ &= \|X_u \times X_v\| \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, \xi \right\rangle \\ &= \|X_u \times X_v\| \langle N_e, \xi \rangle \\ &= K_e^{1/4} \|X_u \times X_v\| = d^{1/4}. \end{aligned}$$

Dessa forma, como  $d \neq 0$ , o vetor normal afim não pertence ao plano tangente à superfície qualquer que seja  $p \in S$ . Além disso, como  $\langle \nu, \xi \rangle = 1$ ,  $\langle \xi, \nu_u \rangle = 0$  e  $\langle \xi, \nu_v \rangle = 0$  então existe uma função  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\xi = \lambda_{(u,v)}(\nu_u \times \nu_v).$$

Assim, calculando o produto interno do normal afim com o conormal, temos:

$$\langle \xi, \nu \rangle = \lambda[\nu_u, \nu_v, \nu] \Rightarrow 1 = \lambda d^{1/4} \Rightarrow \lambda = d^{-1/4}.$$

Portanto, dada uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de uma superfície  $S$  no ponto  $p \in S$ , definimos o *vetor normal afim* em  $p$  como:

$$\xi(p) = [\nu(p), \nu_u(p), \nu_v(p)]^{-1}(\nu_u(p) \times \nu_v(p)).$$

**Proposição 2.2.** O vetor normal afim é constante nos parabolóides elípticos e hiperbólicos.

**Demonstração:** Considerando a parametrização  $X(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$  do parabolóide elíptico. Observe que:

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, u); & X_{uu} &= (0, 0, 1); & X_{vv} &= (0, 0, 1). \\ X_v &= (0, 1, v); & X_{uv} &= (0, 0, 0); \end{aligned}$$

Logo,

$$d = [X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{uv}] - [X_u, X_v, X_{vv}]^2 = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \nu &= |K_e|^{-1/4} N_e = \frac{\|X_u \times X_v\|}{|d|^{1/4}} \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \\ &= \frac{X_u \times X_v}{d^{1/4}} = (-u, -v, 1). \end{aligned}$$

Assim,  $\nu_u = (-1, 0, 0)$  e  $\nu_v = (0, -1, 0)$ . Portanto,

$$\xi = d^{-1/4}(\nu_u \times \nu_v) = (0, 0, 1).$$

Considerando a parametrização do parabolóide hiperbólico como  $S(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$ , de forma analoga, mostra-se que o normal afim em qualquer ponto dessa superfície é vetor  $(0, 0, 1)$ . ■

**Proposição 2.3.** Os vetores conormal e normal afins são, respectivamente, contravariante e covariante por transformações equiafins.

**Demonstração:** Primeiramente mostremos que o vetor conormal afim é contravariante por transformações equiafins.

Com efeito, sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização da superfície  $S$ ,  $A$  uma matriz de ordem 3, com  $\det(A) = 1$  e  $p \in S$ . Observe que  $K_e(A(p)) = \frac{K_e(p)}{\|A^{-T} N_e(p)\|^4}$ .

De fato, temos que:

$$\begin{aligned} K_e(A(p)) &= \frac{[X_u(A(p)), X_v(A(p)), X_{uu}(A(p))] \cdot [X_u(A(p)), X_v(A(p)), X_{uv}(A(p))]}{\|X_u(A(p)) \times X_v(A(p))\|^4} \\ &\quad - \frac{[X_u(A(p)), X_v(A(p)), X_{vv}(A(p))]^2}{\|X_u(A(p)) \times X_v(A(p))\|^4}. \end{aligned}$$



Como  $\{X_u, X_v\}$  formam uma base do plano tangente e sendo este covariante por transformações equiafins, segue que:

$$\begin{aligned}
K_e(A(p)) &= \frac{[A(X_u(p)), A(X_v(p)), A(X_{uu}(p))]. [A(X_u(p)), A(X_v(p)), A(X_{uv}(p))]}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4} \\
&- \frac{[A(X_u(p)), A(X_v(p)), A(X_{vv}(p))]^2}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4} \\
&= \frac{\det(A) \cdot [X_u(p), X_v(p), X_{uu}(p)]. \det(A) \cdot [X_u(p), X_v(p), X_{uv}(p)]}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4} \\
&- \det(A)^2 \cdot \frac{[X_u(p), X_v(p), X_{vv}(p)]^2}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4} \\
&= \frac{[X_u(p), X_v(p), X_{uu}(p)]. [X_u(p), X_v(p), X_{uv}(p)] - [X_u(p), X_v(p), X_{vv}(p)]^2}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4} \\
&= \frac{d}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4}.
\end{aligned}$$

Portanto, pela equação 2.6, temos:

$$K_e(A(p)) = \frac{K_e(p) \|X_u(p) \times X_v(p)\|^4}{\|A(X_u(p)) \times A(X_v(p))\|^4} = \frac{K_e(p)}{\frac{\|A^{-T}(X_u \times X_v)(p)\|^4}{\|(X_u \times X_v)(p)\|^4}} = \frac{K_e(p)}{\|A^{-T}N_e(p)\|^4}.$$

Assim, visto que  $N_e(A(p)) = \frac{1}{\|A^{-T}N_e(p)\|} A^{-T}N_e(p)$ , resulta que:

$$\begin{aligned}
\nu(A(p)) &= |K_e(A(p))|^{-1/4} N_e(A(p)) \\
&= \left( \frac{K_e(p)}{\|A^{-T}N_e(p)\|^4} \right)^{-1/4} \frac{1}{\|A^{-T}N_e(p)\|} A^{-T}N_e(p) \\
&= A^{-T}(\nu(p)).
\end{aligned}$$

Mostremos agora que o normal afim é covariante por transformações equiafins.

Com efeito, como o conormal é contravariante, temos que:

$$\begin{aligned}
\xi(A(p)) &= \lambda(\nu_u(A(p)) \times \nu_v(A(p))) \\
&= \lambda(A^{-T}(\nu_u(p)) \times A^{-T}(\nu_v(p))) \\
&= \lambda A((\nu_u(p) \times \nu_v(p))) \\
&= A(\xi(p)).
\end{aligned}$$

■

No próximo capítulo, calculamos tais vetores no caso particular de uma superfície triangular de Bézier.

### 3 RETALHO TRIANGULAR DE BÉZIER

Neste capítulo, mostramos como os vetores conormal e normal afins podem ser calculados em um retalho triangular de Bézier quadrático. Os resultados apresentados aqui serão essenciais para o cálculo do estimador do vetor normal afim em superfícies discretas, que serão representadas por um conjunto desses retalhos no capítulo seguinte. Começamos então fazendo uma breve apresentação do retalho triangular de Bézier. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [7], [8] e [9].

#### 3.1 POLINÔMIOS DE BERNSTEIN

Os polinômios de Bernstein de grau  $n$ ,  $B_{ijk}^n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , são definidos como:

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \text{ com } i, j, k \geq 0 \text{ e } i + j + k = n.$$

Os escalares  $u, v$  e  $w$  são as coordenadas baricêntricas dos pontos em um domínio triangular. Por simplicidade no texto escrevemos  $B_{ijk}^n(u, v, w)$  como  $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$ , onde  $\mathbf{i} = (i, j, k) \in \{0, 1, \dots, n\}^3$ ,  $|\mathbf{i}| = i + j + k = n$  e  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ .

Tais polinômios satisfazem as seguintes propriedades (ver [9]):

(3.1.1) São linearmente independentes;

(3.1.2) Formam uma base para o espaço de polinômios de grau total  $\leq n$ ;

(3.1.3) São simétricos, ou seja,  $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = B_{\pi(\mathbf{i})}^n(\pi(\mathbf{u}))$ , para qualquer permutação  $\pi$ ;

(3.1.4) Formam uma partição da unidade

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \equiv 1;$$

(3.1.5) São positivos para  $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ , isto é, se todas as coordenadas de  $\mathbf{u}$  forem positivas;

(3.1.6) Satisfazem a relação de recorrência:

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = uB_{\mathbf{i}-e_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{i}-e_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{i}-e_3}^{n-1}(\mathbf{u}),$$

onde  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ ,  $B_{\mathbf{0}}^0 = 1$  e  $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 0$  se  $\mathbf{i}$  tem alguma coordenada negativa e  $|c_j| = n - 1$ , onde  $c_j = \mathbf{i} - e_j$  com  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

## 3.2 REPRESENTAÇÃO DE BÉZIER DE RETALHOS TRIANGULARES

Como, pela propriedade 3.1.2, os polinômios de Bernstein formam uma base para o espaço de polinômios, então, toda superfície polinomial  $b(\mathbf{u})$  tem uma única representação de Bézier,

$$b(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}),$$

com respeito a um triângulo de referência  $T(a_0, a_1, a_2)$ .

**Observação 3.2.1.** A definição acima pode ser generalizada para o caso  $d$ -dimensional com relação a um simplexo de dimensão  $d > 1$ .

Os coeficientes  $b_{\mathbf{i}}$  são chamados *pontos (ou ordenadas) de Bézier* de  $b$  e são os vértices da chamada *malha de Bézier (ou malha de controle)* de  $b(\mathbf{u})$ . Portanto, a malha de controle define uma única representação de Bézier. O número de vértices da malha é dado por  $(n+1)(n+2)/2$ , onde  $n$  é o grau do polinômio (ver figura 3.2).

Definimos a representação de Bézier  $b(\mathbf{u})$ , como a parametrização  $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um retalho triangular de Bézier, ou seja,

$$\varphi(x, y) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}),$$

com  $\mathbf{u} = (x, y, 1 - x - y)$ .

Dessa forma, obtemos as seguintes propriedades:

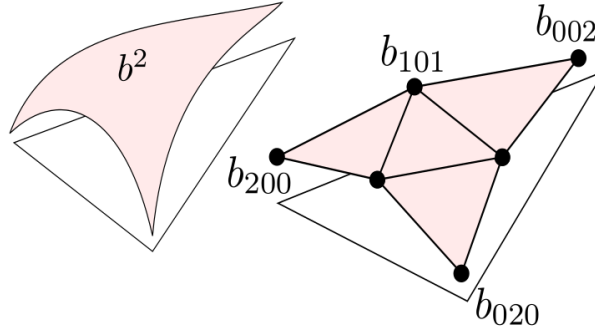
(3.2.1)  $\varphi$  é uma combinação afim de pontos de Bézier (isto segue diretamente da propriedade 3.1.4). Consequentemente, **é covariante por transformações afins**.

(3.2.2) Para todo  $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ ,  $\varphi(\mathbf{u})$  é uma combinação convexa dos pontos de Bézier  $b_{\mathbf{i}}$  (pois os polinômios de Bernstein são não negativos sobre  $T$ ). Portanto, sua imagem satisfaz a propriedade do fecho convexo.

(3.2.3) A fronteira da imagem de  $\varphi$  são Curvas de Bézier, logo interpola os extremos da sua malha de controle.

A figura 3.2 ilustra o retalho de Bézier quadrático, à esquerda, com sua malha de controle, à direita. Note que cada uma das três curvas que formam o bordo do retalho é a parábola de Bézier definida pelos três pontos de controle correspondentes na malha de controle do retalho.

**Figura 3.2:** Retalho quadrático de Bézier junto a sua malha de controle.



Fonte: Autor, 2014.

### 3.3 ALGORITMO DE DE CASTELJAU

A representação de Bézier,  $b(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$ , pode ser avaliada usando o seguinte algoritmo recursivo proposto por de Casteljaeu (ver [7]):

**Entrada:** Conjunto de pontos  $b_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}^3$  (vértices da malha da representação de Bézier), as coordenadas baricêntricas  $\mathbf{u}$  de um ponto do plano e o grau  $n$  do polinômio.

**Saída** : Avaliação da representação de Bézier em um ponto do seu domínio triangular com coordenadas baricêntricas  $\mathbf{u}$ .

1 Considere multi-índices  $\mathbf{i} = (i, j, k)$ , com  $i, j, k \in \{0, 1, \dots, n\}^3$  tais que

$$|\mathbf{i}| = i + j + k = n.$$

2 Tome  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ .

3 Considerando  $b_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = b_{\mathbf{i}}$ , para  $r = 1$  faça:

$$b_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = ub_{\mathbf{i}+e_1}^0(\mathbf{u}) + vb_{\mathbf{i}+e_2}^0(\mathbf{u}) + wb_{\mathbf{i}+e_3}^0(\mathbf{u}).$$

4 Para  $r \in \{2, 3, \dots, n\}$ . Se  $|\mathbf{i}| = n - r$ , então recursivamente faça:

$$b_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = ub_{\mathbf{i}+e_1}^{r-1}(\mathbf{u}) + vb_{\mathbf{i}+e_2}^{r-1}(\mathbf{u}) + wb_{\mathbf{i}+e_3}^{r-1}(\mathbf{u}).$$

5 Retorne  $b_{\mathbf{0}}^n(\mathbf{u})$ , o qual corresponde ao ponto com valor de parâmetro  $\mathbf{u}$  na superfície de Bézier.

A figura 3.3 ilustra como o ponto do domínio é levado a um retalho de Bézier quadrático pelo algoritmo de de Casteljau. Nela, observe que, dada a malha de controle de um retalho de Bézier quadrático  $R$  e as coordenadas baricêntricas,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , de um ponto do plano com respeito ao domínio  $T(a_0, a_1, a_2)$ , no primeiro passo do algoritmo, isto é, para  $r = 1$  temos que  $\mathbf{i} \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ . Logo, encontramos uma nova malha  $\{b_{100}, b_{010}, b_{001}\}$ , da seguinte maneira:

$$b_{100}^1(\mathbf{u}) = ub_{200}^0(\mathbf{u}) + vb_{110}^0(\mathbf{u}) + wb_{101}^0(\mathbf{u}) = ub_{200} + vb_{110} + wb_{101};$$

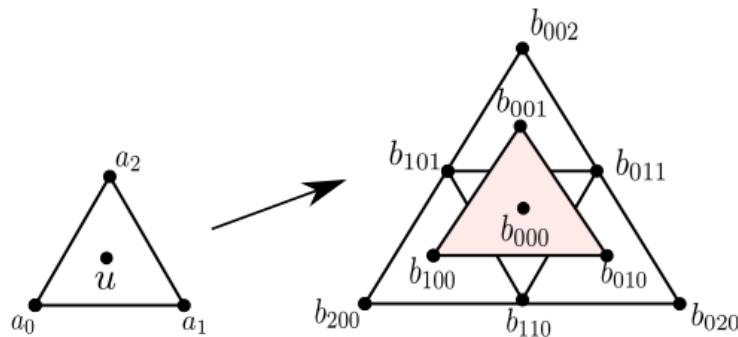
$$b_{010}^1(\mathbf{u}) = ub_{110}^0(\mathbf{u}) + vb_{020}^0(\mathbf{u}) + wb_{011}^0(\mathbf{u}) = ub_{110} + vb_{020} + wb_{011};$$

$$b_{001}^1(\mathbf{u}) = ub_{101}^0(\mathbf{u}) + vb_{011}^0(\mathbf{u}) + wb_{002}^0(\mathbf{u}) = ub_{101} + vb_{011} + wb_{002}.$$

No próximo passo, para  $r = 2$ , temos que  $\mathbf{i} = (0, 0, 0)$  e assim obtemos a imagem do ponto  $p \in \mathbb{R}^2$ , com coordenadas baricêntricas  $\mathbf{u}$  em relação ao domínio  $T$ , na superfície de Bézier  $R$  como:

$$b_{000}^2 = ub_{100}^1(\mathbf{u}) + vb_{010}^1(\mathbf{u}) + wb_{001}^1(\mathbf{u}).$$

**Figura 3.3:** Algoritmo de de Casteljau.



Fonte: Autor, 2014.

### 3.4 VETORES CONORMAL E NORMAL AFINS NO RETALHO TRIANGULAR DE BÉZIER QUADRÁTICO

Para o cálculo do normal afim em um retalho triangular de Bézier quadrático  $R$ , precisamos definir sua parametrização  $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Para isso, vamos encontrar os polinômios de Bernstein,  $B_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u})$ , onde  $\mathbf{i} = (i, j, k)$  são inteiros não-negativos, tais que,  $i + j + k = 2$  e  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  são as coordenadas baricêntricas dos pontos referente ao domínio triangular  $T$  de  $R$ . Logo, sabendo que  $B_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u}) = \frac{2!}{i!j!k!}u^i v^j w^k$ , temos:

$$\begin{aligned} B_{200}^2(\mathbf{u}) &= u^2 & B_{020}^2(\mathbf{u}) &= v^2 & B_{002}^2(\mathbf{u}) &= w^2 \\ B_{110}^2(\mathbf{u}) &= 2uv & B_{101}^2(\mathbf{u}) &= 2uw & B_{011}^2(\mathbf{u}) &= 2vw. \end{aligned}$$

Definidos os polinômios de Bernstein e uma malha de controle  $\{b_{200}, b_{020}, b_{002}, b_{110}, b_{101}, b_{011}\}$ , tomando  $\mathbf{u} = (x, y, 1 - x - y)$ , obtemos a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (b_{200} + b_{002} - 2b_{101})x^2 + (b_{020} + b_{002} - 2b_{011})y^2 + (2b_{002} - 2b_{011} - 2b_{101} + b_{110})xy \\ &+ 2(b_{101} - b_{002})x + 2(b_{011} - b_{002})y + b_{002}. \end{aligned}$$

Uma vez definida a parametrização, podemos calcular o vetor conormal afim, e consequentemente o vetor normal afim, em  $R$ . Para isso, note que:

$$K_e = \frac{LN - M^2}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|^4} \Rightarrow |K_e|^{-1/4} = \frac{\|\varphi_x \times \varphi_y\|}{|LN - M^2|^{1/4}}.$$

Logo, considerando  $D = LN - M^2$ , temos:

$$\nu = |K_e|^{-1/4} N_e = \frac{\|\varphi_x \times \varphi_y\|}{|D|^{1/4}} \cdot \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{|D|^{1/4}}.$$

Tomando, os vetores  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^3$ , como:

$$\begin{aligned} a &= b_{200} + b_{002} - 2b_{101}; & d &= 2(b_{101} - b_{002}); \\ b &= b_{020} + b_{002} - 2b_{011}; & e &= 2(b_{011} - b_{002}); \\ c &= 2(b_{002} - b_{011} - b_{101} + b_{110}); & f &= b_{002}. \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1, a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy \\ &+ d_2x + e_2y + f_2, a_3x^2 + b_3y^2 + c_3xy + d_3x + e_3y + f_3). \end{aligned}$$

onde  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$  com  $i \in \{1, 2, 3\}$ , são as coordenadas dos vetores  $a, b, c, d, e, f$ . Assim,

$$\varphi_x = (2a_1x + c_1y + d_1, 2a_2x + c_2y + d_2, 2a_3x + c_3y + d_3);$$

$$\varphi_y = (2b_1y + c_1x + e_1, 2b_2y + c_2x + e_2, 2b_3y + c_3x + e_3);$$

$$\varphi_{xx} = (2a_1, 2a_2, 2a_3);$$

$$\varphi_{yy} = (2b_1, 2b_2, 2b_3);$$

$$\varphi_{xy} = (c_1, c_2, c_3).$$

Daí, segue que:

$$\nu = \frac{1}{|D|^{1/4}}(2(a_2c_3 - a_3c_2)x^2 + 2(b_3c_2 - b_2c_3)y^2 + 4(a_2b_3 - a_3b_2)xy + (2a_2e_3 - 2a_3e_2 + d_2c_3 - d_3c_2)x + (2d_2b_3 - 2d_3b_2 + c_2e_3 - c_3e_2)y + d_2e_3 - d_3e_2, \quad 2(a_3c_1 - a_1c_3)x^2 + 2(b_1c_3 - b_3c_1)y^2 + 4(a_3b_1 - a_1b_3)xy + (2a_3e_1 - 2a_1e_3 + d_3c_1 - d_1c_3)x + (2d_3b_1 - 2d_1b_3 + c_3e_1 - c_1e_3)y + d_3e_1 - d_1e_3, \quad 2(a_1c_2 - a_2c_1)x^2 + 2(b_2c_1 - b_1c_2)y^2 + 4(a_1b_2 - a_2b_1)xy + (2a_1e_2 - 2a_2e_1 + d_1c_2 - d_2c_1)x + (2d_1b_2 - 2d_2b_1 + c_1e_2 - c_2e_1)y + d_1e_2 - d_2e_1);$$

$$\nu_x = \frac{1}{|D|^{1/4}}(4(a_2c_3 - a_3c_2)x + 4(a_2b_3 - a_3b_2)y + 2a_2e_3 - 2a_3e_2 + d_2c_3 - d_3c_2, \quad 4(a_3c_1 - a_1c_3)x + 4(a_3b_1 - a_1b_3)y + 2a_3e_1 - 2a_1e_3 + d_3c_1 - d_1c_3, \quad 4(a_1c_2 - a_2c_1)x + 4(a_1b_2 - a_2b_1)y + 2a_1e_2 - 2a_2e_1 + d_1c_2 - d_2c_1);$$

$$\nu_y = \frac{1}{|D|^{1/4}}(4(b_3c_2 - b_2c_3)y + 4(a_2b_3 - a_3b_2)x + 2d_2b_3 - 2d_3b_2 + c_2e_3 - c_3e_2, \quad 4(b_1c_3 - b_3c_1)y + 4(a_3b_1 - a_1b_3)x + 2d_3b_1 - 2d_1b_3 + c_3e_1 - c_1e_3, \quad 4(b_2c_1 - b_1c_2)y + 4(a_1b_2 - a_2b_1)x + 2d_1b_2 - 2d_2b_1 + c_1e_2 - c_2e_1).$$

Como o retalho triangular de Bézier quadrático é um parabolóide (ver [7]) e sabendo que os normais afins nos parabolóides são constantes, logo, constante em todo o retalho, podemos calculá-los nos pontos com coordenadas baricêntricas  $(0, 0, 1)$ , dessa forma, temos:

$$\nu(0, 0) = \frac{1}{|D|^{1/4}}(d_2e_3 - d_3e_2, d_3e_1 - d_1e_3, d_1e_2 - d_2e_1);$$

$$\nu_x(0, 0) = \frac{1}{|D|^{1/4}}(2a_2e_3 - 2a_3e_2 + d_2c_3 - d_3c_2, 2a_3e_1 - 2a_1e_3 + d_3c_1 - d_1c_3, 2a_1e_2 - 2a_2e_1 + d_1c_2 - d_2c_1);$$

$$\nu_y(0, 0) = \frac{1}{|D|^{1/4}}(2d_2b_3 - 2d_3b_2 + c_2e_3 - c_3e_2, 2d_3b_1 - 2d_1b_3 + c_3e_1 - c_1e_3, 2d_1b_2 - 2d_2b_1 + c_1e_2 - c_2e_1).$$

onde,

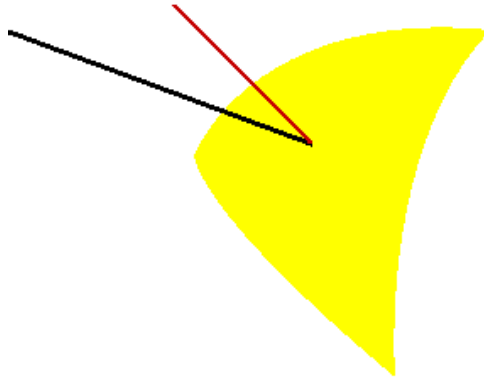
$$D = [\varphi_x(0, 0), \varphi_y(0, 0), \varphi_{xx}(0, 0)][\varphi_x(0, 0), \varphi_y(0, 0), \varphi_{xy}(0, 0)] - [\varphi_x(0, 0), \varphi_y(0, 0), \varphi_{yy}(0, 0)]^2.$$

Portanto, o normal afim no retalho triangular de Bézier quadrático,  $\xi_R$ , é definido por:

$$\xi_R = [\nu(0, 0), \nu_x(0, 0), \nu_y(0, 0)]^{-1}(\nu_x(0, 0) \times \nu_y(0, 0)).$$

Observe que este vetor depende apenas dos vértices da malha de controle do retalho. A figura 3.4 ilustra os vetores conormal, em preto, e normal afins, em vermelho, no retalho triangular de Bézier quadrático.

**Figura 3.4:** Vetores conormal e normal afins no retalho triangular de Bézier quadrático.



Fonte: Autor, 2014.



## 4 CÁLCULO DO NORMAL AFIM DISCRETO

Na Geometria Euclidiana o plano tem normal constante e portanto curvatura gaussiana nula, porém, o mesmo não é estudado na Geometria Afim uma vez que consideramos o coeficiente da métrica afim  $d = LN - M^2 \neq 0$ . Como os parabolóides elípticos e hiperbólicos possuem normal afim constante e curvatura gaussiana afim nula, podemos dizer que os mesmos são equivalentes a planos euclidianos na geometria afim. Dessa forma, sendo o retalho triangular de Bézier quadrático um parabolóide, buscamos representar a superfície por um conjunto desses retalhos obtendo, assim, sua representação discreta. Neste capítulo, apresentamos nosso estimador normal afim, obtido a partir dessa representação discreta da superfície. Vejamos, primeiramente, como contruímos a discretização da superfície considerando pedaços de parabolóides ao invés de planos, possibilitando, dessa forma, o estudo de invariantes discretos afins.

### 4.1 REPRESENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES DISCRETAS POR RETALHOS TRIANGULARES DE BÉZIER QUADRÁTICOS

Dada uma malha triangular de uma superfície  $S$ , consideramos cada face dessa malha como o domínio da parametrização de um retalho triangular de Bézier quadrático  $R_l$ , com  $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ , onde  $n$  é a quantidade de triângulos da malha.

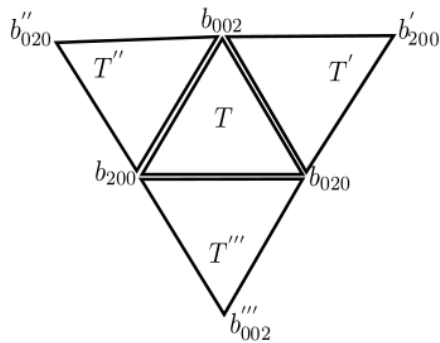
No capítulo anterior, vimos que uma parametrização de retalho triangular de Bézier é definida pelos polinômios de Bernstein e pela malha de controle do retalho, onde a quantidade de vértices dessa malha depende do grau do polinômio. Lembramos ainda que uma malha de controle define um único retalho de Bézier.

Como estamos considerando retalhos de Bézier quadráticos precisamos para cada  $R_l$  definir seis pontos,  $\{b_{200}, b_{020}, b_{002}, b_{110}, b_{101}, b_{011}\}$ , da sua malha de controle. Neste trabalho, tomamos os pontos extremos,  $b_{200}, b_{020}$  e  $b_{002}$ , da malha de controle dos retalhos como os vértices da face referente ao domínio de cada um deles, dessa forma, pela propriedade 3.2.3, tais retalhos

interpolará os vértices da malha da superfície. Os outros três vértices,  $b_{110}$ ,  $b_{101}$  e  $b_{011}$ , obtivemos da seguinte maneira:

1. Para cada triângulo  $T(b_{200}, b_{020}, b_{002})$  da malha da superfície, correspondente ao domínio de um retalho, consideramos os seus triângulos adjacentes  $T'(b_{002}, b_{020}, b'_{200})$ ,  $T''(b_{200}, b_{002}, b''_{020})$  e  $T'''(b_{020}, b_{200}, b'''_{002})$ .

**Figura 4.5:** Triângulos que compartilham as arestas do domínio  $T$ .



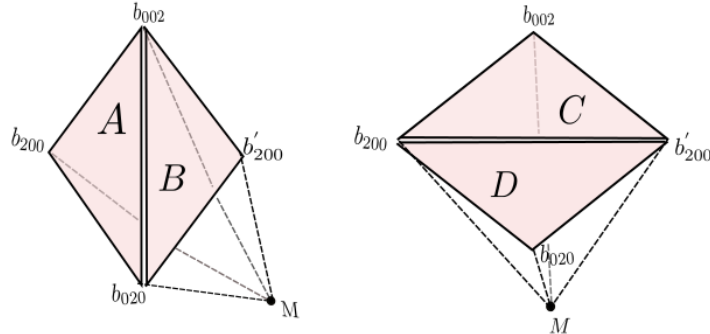
Fonte: Autor, 2014.

2. Para cada um dos triângulos adjacentes a  $T$ , consideramos quatro tetraedros cujos lados são triângulos formados pelos vértices das arestas de  $T$  e os vértices das arestas de um dos seus triângulos adjacentes, com o centro de massa da união das  $k$ -vizinhanças estreladas dos vértices da aresta comum a esses dois triângulos. Como por exemplo, na figura 4.6, tomando os triângulos  $T$  e  $T'$  teremos os tetraedros  $A(b_{200}, b_{020}, b_{002}, M)$ ,  $B(b'_{200}, b_{020}, b_{002}, M)$ ,  $C(b_{002}, b_{200}, b'_{200}, M)$  e  $D(b_{020}, b'_{200}, b_{200}, M)$ , com

$$M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi_i,$$

onde  $\Phi_i$  são pontos da união da  $k$ -vizinhança estrelada de  $b_{200}$ , com a  $k$ -vizinhança estrelada de  $b_{020}$  e  $m$  é a quantidade de pontos dessa união. Observe que as bases desses tetraedros são: o domínio triangular  $T$ , um dos seus triângulos vizinhos  $T'$  e outros dois triângulos obtidos fazendo um flip na aresta comum a  $T$  e  $T'$ .

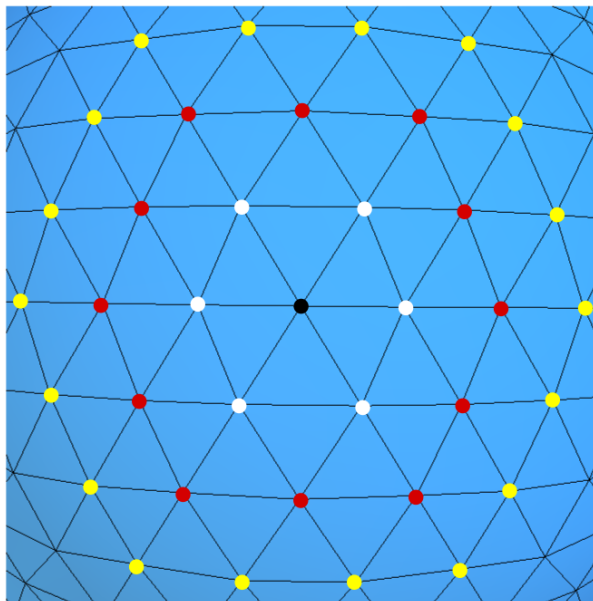
**Figura 4.6:** Quatro tetraedros que podem ser formados por dois triângulos adjacentes junto ao centro de massa da união das  $k$ -vizinhanças dos vértices da aresta comum desses dois triângulos.



Fonte: Autor, 2014.

Ressaltamos que, dado um vértice  $v_i$  da malha de uma superfície, a  $k$ -vizinhança estrelada de  $v_i$  é o conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  que está separado de  $v_i$  por exatas  $k$  arestas. A primeira vizinhança estrelada de  $v_i$ , por exemplo, é composta dos vértices adjacentes a este, ou seja, que compartilham uma mesma aresta. A 2-vizinhança de  $v_i$ , então, é o conjunto de vértices adjacentes a cada um dos seus primeiros vizinhos, e assim sucessivamente. A figura 4.7 mostra os 3-vizinhos do vértice em preto, 1-vizinhança são os vértices em branco, a 2-vizinhança é formada pelos vértices em branco e em vermelho e a 3-vizinhança são os vértices em branco, vermelho e amarelo.

**Figura 4.7:** 3-vizinhança de um vértice.



Fonte: Autor, 2014.

3. Para cada triângulo incidente a uma aresta de  $T$ , calculamos o quociente das somas dos volumes dos dois tetraedros cujas bases são o domínio triangular  $T$  e um dos seus triângulos vizinhos, pela soma dos volumes dos outros dois tetraedros cujas bases são obtidas fazendo um flip na aresta comum a esses dois triângulos, pelo exemplo do item anterior, teríamos:

$$\alpha = \frac{Vol(A) + Vol(B)}{Vol(C) + Vol(D)}. \quad (4.7)$$

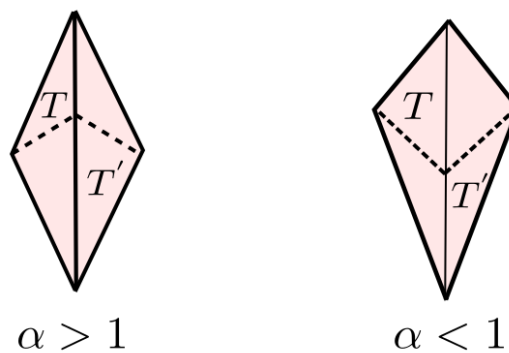
O valor de  $\alpha$  nos dá informações sobre a concavidade do poliedro formado por  $T$  e  $T'$ . Note que, se  $\alpha > 1$  então a soma dos volumes dos tetraedros  $A$  e  $B$  é maior que a soma dos volumes dos tetraedros  $C$  e  $D$ , portanto o poliedro formado por  $T$  e  $T'$  é convexo. Caso contrário, se  $\alpha < 1$ , o poliedro é côncavo (ver figura 4.8). Sendo assim, tomamos:

$$\beta = \begin{cases} \alpha(1 + \epsilon), & \text{se } \alpha > 1 \\ \alpha(1 - \epsilon), & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

com  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ .

Isso faz com que os pontos que buscamos da malha de controle,  $b_{110}, b_{101}, b_{011}$ , se distancie das aresta de  $T$ , controlando assim, a curvatura (euclidiana) do retalho. Quanto maior o valor de  $\epsilon$  maior a curvatura desse retalho, isto é, mais distantes esses três pontos serão das arestas de  $T$ .

**Figura 4.8:** Relação entre o valor de  $\alpha$  e a concavidade do poliedro.



Fonte: Autor, 2014.

4. Obtemos os outros três pontos da malha de controle de cada  $R_i$ , como:

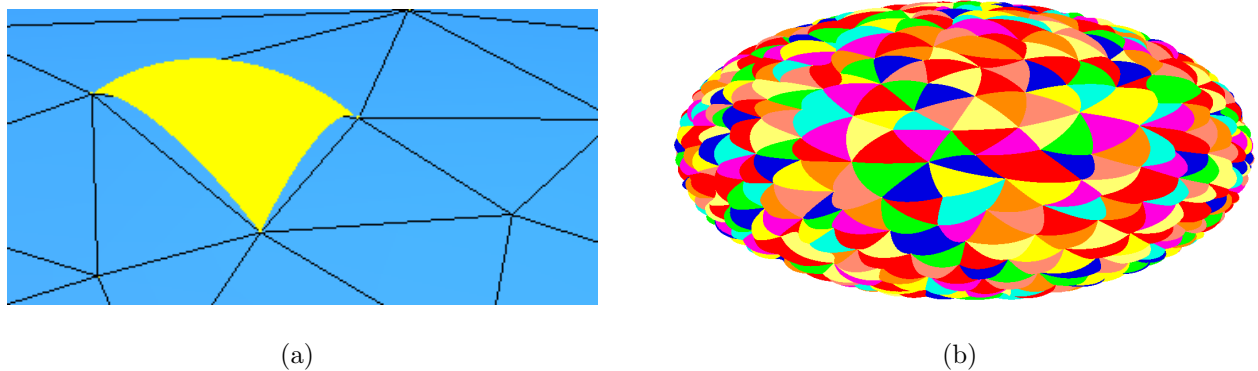
$$\begin{aligned} b_{110} &= \frac{\beta'}{2}(b_{200} + b_{020}) + (1 - \beta')M'; \\ b_{011} &= \frac{\beta''}{2}(b_{020} + b_{002}) + (1 - \beta'')M''; \\ b_{101} &= \frac{\beta'''}{2}(b_{002} + b_{200}) + (1 - \beta''')M''', \end{aligned}$$

com,  $\beta' = \alpha'(1 \pm \epsilon)$ ,  $\beta'' = \alpha''(1 \pm \epsilon)$  e  $\beta''' = \alpha'''(1 \pm \epsilon)$ , onde  $\alpha', \alpha'', \alpha'''$  são tomados de maneira análoga a equação (3.7), considerando os quatro tetraedros formados, respectivamente, por  $T$  e  $T'$ ,  $T$  e  $T''$ ,  $T$  e  $T'''$  com os respectivos centros de massa  $M'$ ,  $M''$  e  $M'''$  da união da  $k$ -vizinhança estrelada dos vértices das arestas comum de cada um desses triângulos. O tamanho  $k$  das  $k$ -vizinhanças vai depender da malha da superfície. O sinal de  $\pm$  está relacionado com a concavidade do poliedro formado por  $T$  e cada um dos seus triângulos adjacentes.

Uma vez definida a malha de controle de cada retalho  $R_l$ , obtemos as suas parametrizações  $\varphi_l : T_l \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , como na seção 3.4. Como as transformações equiafins preservam combinações afins de pontos e o centro de massa é covariante por essas transformações, pela forma como definimos os vértices da malha de controle dos retalhos, garantimos que cada  $\varphi_l$  satisfaça a propriedade (3.2.1).

A figura 4.9 ilustra em (a) um único retalho quadrático de Bézier em uma malha triangular do elipsóide e em (b) a representação discreta do elipsóide por um conjunto desses retalhos.

**Figura 4.9:** Discretização do elipsóide por retalhos triangulares de Bézier quadráticos.



Fonte: Autor, 2014.

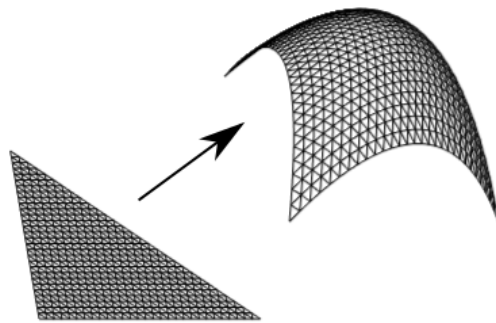
## 4.2 NORMAL AFIM NO VÉRTICE DA MALHA TRIANGULAR DE UMA SUPERFÍCIE DISCRETA

Definimos o vetor normal afim no vértice de uma malha triangular da superfície como a média ponderada dos normais afins nos retalhos, cujos domínios são triângulos incidentes neste vértice. O peso está dado pelas áreas dos respectivos retalhos.

Aproximamos a área de um retalho  $R$ , pela soma das áreas dos triângulos em  $R$  obtidos pelo algoritmo de de Casteljau aplicado as coordenadas baricêntricas da  $n$ -partição do triângulo  $T((0,0), (0,1), (1,0))$ , considerando a malha de controle de  $R$  (ver figura 4.10). A  $n$ -partição de  $T$  é definida pelos pontos com coordenadas baricêntricas:

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, 1 - \frac{i}{n} - \frac{j}{n}\right), \text{ com } i, j \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

**Figura 4.10:** Imagens da  $n$ -partição de um triângulo no retalho de Bézier quadrático.



Fonte: Autor, 2014.

Como, por construção, os retalhos triangulares de Bézier interpolam os vértices dos triângulos da malha da superfície, correspondente ao seu domínio (ver figura 4.9), então um vértice  $v_i$  será comum aos retalhos que cujos domínios são triângulos que incidem nesse vértice. Assim, sabendo que o vetor normal afim é constante em um retalho de Bézier quadrático, o definimos em  $v_i$  pela seguinte relação:

$$\xi_i = \frac{\sum A_{R_i} \xi_{R_i}}{\sum A_{R_i}}.$$

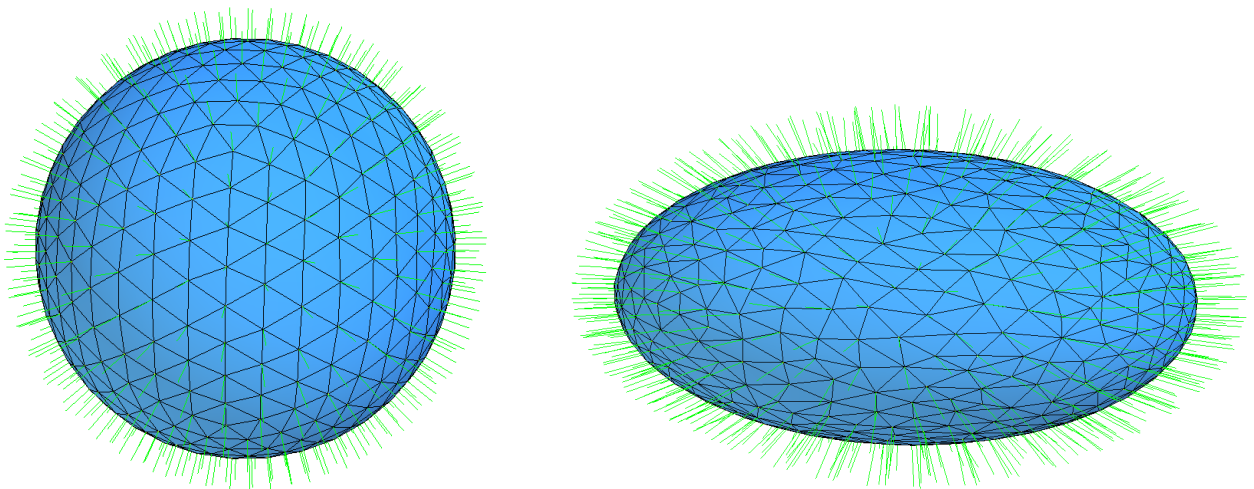
Dessa forma, como áreas são preservadas por transformações equiafins, garantimos que esse vetor normal afim discreto seja covariante por essas transformações.

## 5 RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos para a estimativa do vetor normal afim em superfícies discretas, destacando também as limitações encontradas na sua implementação.

**Estimador Normal Afim:** A figura 5.11 ilustra o estimador normal afim nos vértices da malha triangular da esfera e do elipsóide. Para definir os pontos da malha de controle dos retalhos, como descrito no capítulo anterior, calculamos a 7-vizinhança dos vértices das arestas de cada triângulo da malha da superfície, e tomamos  $\epsilon = 0,1$ . Vale lembrar que o tamanho da vizinhança depende da discretização da malha. Na figura 5.12, por exemplo, observe que uma boa aproximação do vetor normal afim, nos vértices de uma malha com 6000 faces, só foi obtida com décima vizinhança.

**Figura 5.11:** Estimativa do vetor normal afim.

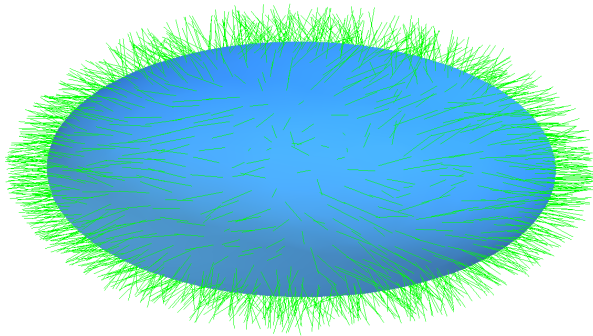


(a) Normais afim nos vértices da malha com 1280 triângulos.

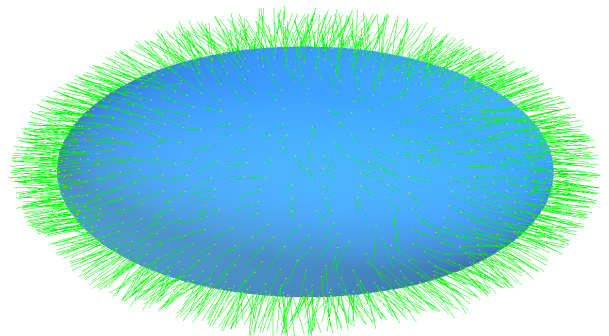
(b) Normais afim nos vértices da malha com 1730 triângulos.

Fonte: Autor, 2014.

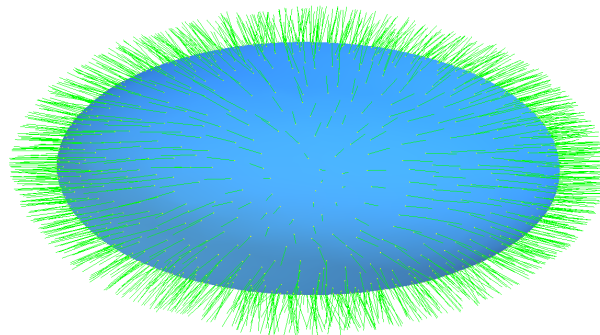
**Figura 5.12:** Estimador normal afim e tamanho da vizinhança.



(a) Normais afim com a quinta vizinhança.



(b) Normais afim com a sétima vizinhança.



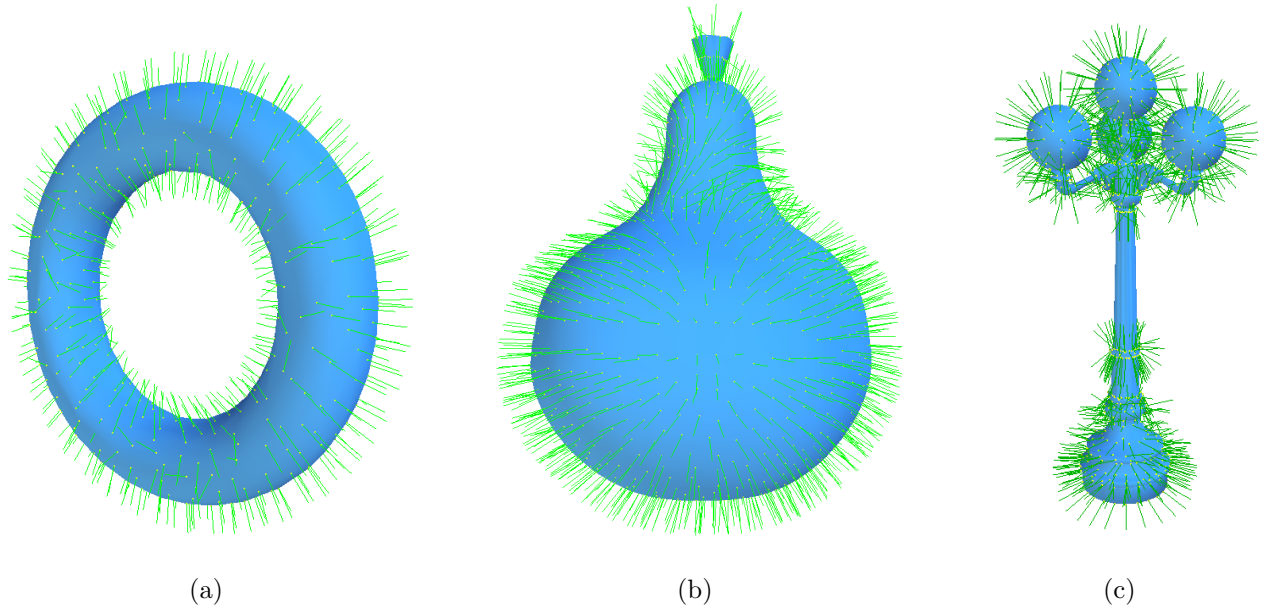
(c) Normais afim com a décima vizinhança.

Fonte: Autor, 2014.

**Limitações:** Nosso trabalho, restringe-se a superfícies fechadas sem pontos planares ou parabólicos, visto que o normal afim não está definido nos pontos com curvatura gaussiana nula. Observe na figura 5.13, por exemplo, que nos pontos onde houve uma variação do sinal da curvatura os normais não ficaram bem calculados. Além disso, ainda não sabemos de que forma a discretização da superfície pode influenciar no tamanho necessário de vizinhanças para definir a malha de controle dos retalhos. Porém, observamos que a sétima vizinhança nos dá uma boa aproximação do vetor normal afim, em malhas com 1000 à 3000 triângulos. Evitamos também trabalhar com malhas cuja triangulação contenha triângulos obtusângulos, pois, nesses casos, os três vértices da malha de controle do retalho definidos sobre as arestas da face correspondente ao seu domínio, se distanciam bastante das arestas destes triângulos gerando portanto retalhos alongados (ver figura 5.14).

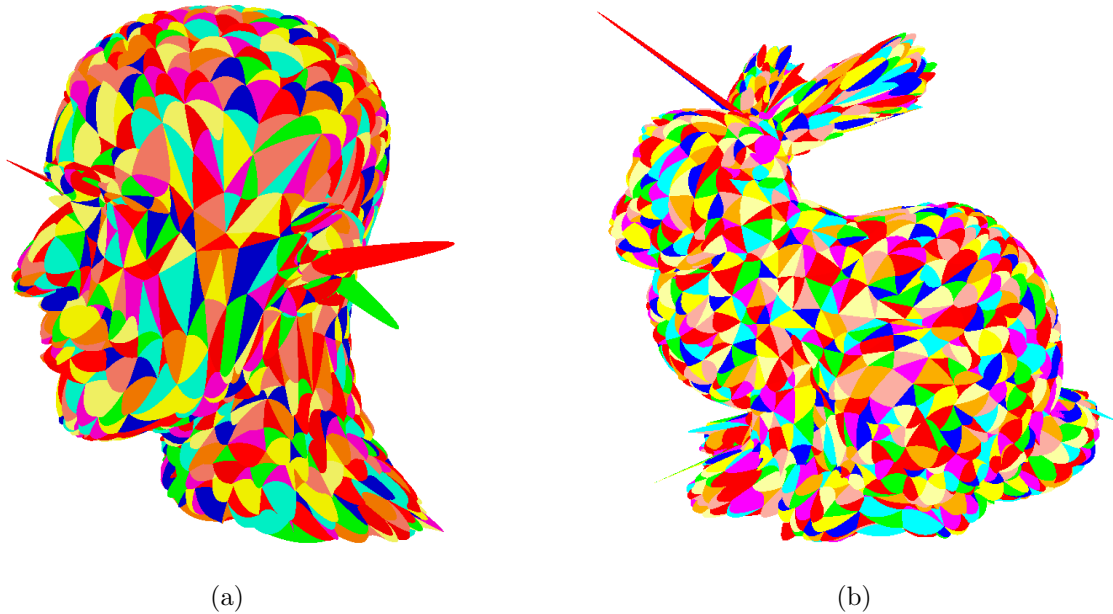


**Figura 5.13:** Estimativa do normal afim nos pontos de variação do sinal da curvatura gaussiana euclidiana.



Fonte: Autor, 2014.

**Figura 5.14:** Formato do retalho quando o seu domínio é um triângulo obtusângulo.



Fonte: Autor, 2014.

**Características geométricas preservadas:** O vetor conormal no retalho triangular de Bézier e o estimador normal afim são, respectivamente, contravariantes e covariantes por transformações equiafins. A figura 5.15, ilustra tais vetores antes e depois de uma transformação

equiafim juntamente com o seu erro médio de contravariância e de covariância. Denotando por  $\nu_{a_l}, \nu_{d_l}$ , com  $l \in \{1, \dots, m\}$ , o vetor conormal afim antes e depois de uma transformação equiafim e por  $\xi_{a_i}, \xi_{d_i}$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o vetor normal afim antes e depois da mesma transformação, onde  $m$  e  $n$  são respectivamente a quantidade de triângulos e vértices da malha da superfície, o erro médio de contravariância  $e_t$  e o erro médio de covariância  $e_v$ , foram definidos como:

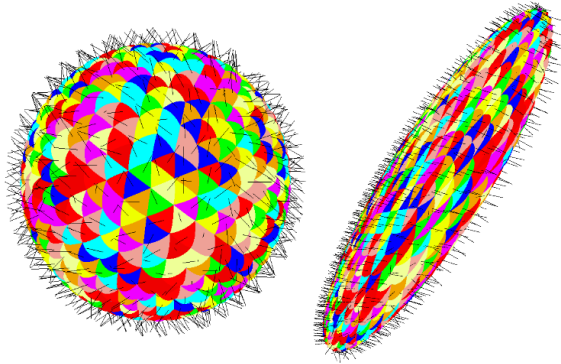
$$e_t = \sum_{l=1}^m \frac{\|\nu_{a_l} - \nu_{d_l}\|}{m}$$

$$e_v = \sum_{i=1}^n \frac{\|\xi_{a_i} - \xi_{d_i}\|}{n}.$$

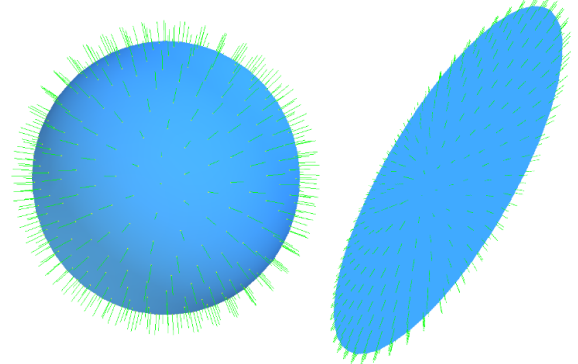
Ainda na figura 5.15, observe que essas propriedades são satisfeitas mesmo com as limitações apresentadas acima. A matriz linear da transformação equiafim foi gerada aleatoriamente pelo computador, de modo que o seu determinante seja um.

**Trabalhos Futuros e Considerações Finais:** Com este trabalho, dispomos agora de propriedades geométricas afins, especificamente o vetor normal afim, em superfícies discretas compatíveis com as do modelo afim diferencial. Como trabalho futuro, pretendemos encontrar estimadores para as curvaturas gassianas e médias afins para essas superfícies. Este trabalho torna-se, portanto, o primeiro passo para esse estudo.

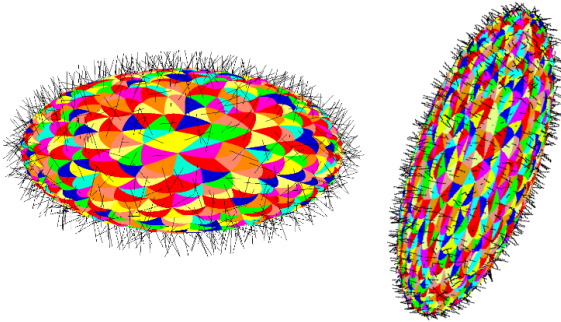
**Figura 5.15:** À esquerda o vetor conormal afim e à direita o vetor normal afim antes e depois de uma transformação equiafim.



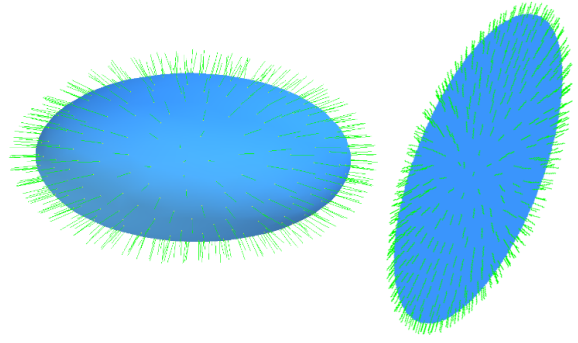
(a) Erro médio contravariância igual a  $1.34288e^{-15}$



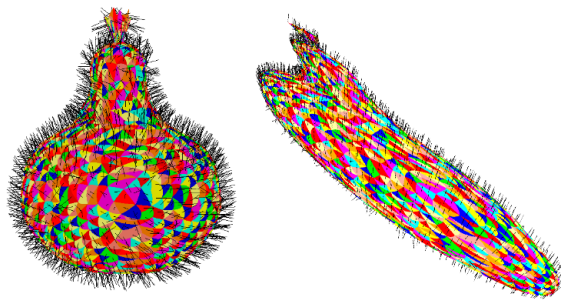
(b) Erro médio covariância igual a  $8.4281e^{-15}$



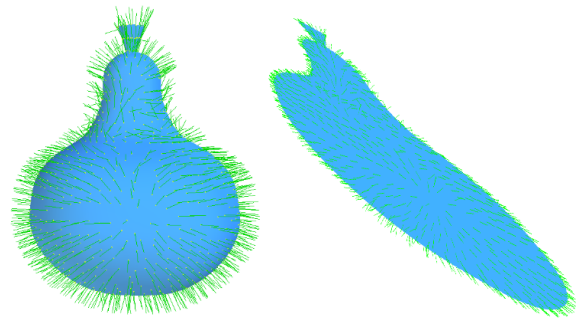
(c) Erro médio contravariância igual a  $8.27393e^{-15}$



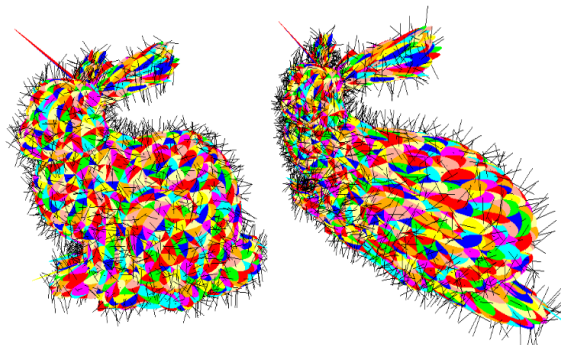
(d) Erro médio covariância igual a  $6.33971e^{-14}$



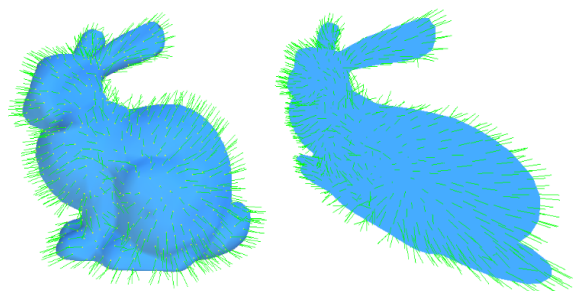
(e) Erro médio contravariância igual a  $4.30836e^{-12}$



(f) Erro médio covariância igual a  $3.20841e^{-08}$



(g) Erro médio contravariância igual a  $8.41602e^{-14}$



(h) Erro médio covariância igual a  $3.47035e^{-11}$

# Referências

- [1] ANDRADE, M. Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies. 2011. 82 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2011.
- [2] ANDRADE, M. e LEWINER, T. Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução às Geometrias Euclidianas e Afim. 28 Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 2011.
- [3] CALABI, E. *Hypersurfaces with maximal affinely invariant area*. American Journal of Mathematics, 104(1): 91 - 126, 1982.
- [4] CRAIZER, M., LEWINER T. e MORVAN J. Parabolic polygons and discrete affine geometry. Sibgrapi 2006, pp. 19 - 26.
- [5] DO CARMO, M. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - 4. ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [6] KIM, S. J., KIM C. H. e LEVIN D., Surface simplification using a discrete curvature norm, Computers and Graphics 26 (5) (2002) 657-663.
- [7] FARIN, G. Bézier Triangles. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide*. páginas 279 - 307, 1996.
- [8] FARIN, G. Triangular Bernstein - Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*. páginas 83 - 127, 1986.
- [9] PALUSZNY, M., PRAUTZSCH, H., BOEHM W. Representaciones de Bézier de patches triangulares. *Métodos de Bézier y B-Splines*, páginas 141 - 153, 2005.
- [10] SICHACÁ, B. M. Dinâmica das Linhas de Curvatura de Superfícies no Espaço Afim. 2013. 91f. (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2013.

- [11] TAUBIN G., Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation, in: Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision, 1995, pp. 902-907.
- [12] WATANABE, K. e BELYAEV G. A., Detection of salient curvature features on polygonal surfaces, Computer Graphics Forum 20 (3) (2001) 385-392.